**DE LUNA OCAMPO YANINA – PROCESOS ESTOCÁSTICOS – 5AM1**

**Principio de invariancia**

Podemos definir el principio de invariancia de Donsker como lo siguiente: cualquier secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuida (i.i.d) 𝑋1 ,… , 𝑋𝑛 con media 0 y varianza 1, generalizando la construcción del movimiento Browniano a partir de una caminata aleatoria simétrica simple.

Sea 𝑆𝑛 = 𝑋1 + ⋯ + 𝑋𝑛 . Entonces, 𝑆𝑛𝑡 √𝑛 converge a 𝐵𝑡 , mientras 𝑛 → ∞

La palabra invariancia es utilizada debido a que todas las caminatas aleatorias con incrementos que tienen media 0 y varianza 1, independientemente de la distribución, dan el mismo límite de movimiento browniano.

Sabiendo esto, una consecuencia del principio de invariancia y continuidad es que las funciones del proceso discreto 𝑆𝑛𝑡 √𝑛 convergen a la correspondiente función de movimiento Browniano, mientras 𝑛 → ∞. Si 𝑔 es una función continua acotada, cuyo dominio es el conjunto de funciones continuas en [0, 1], entonces 𝑔 ( 𝑆𝑛𝑡 √𝑛 ) ≈ 𝑔( 𝐵𝑡 ) para 𝑛 grande.

**Ejemplo:** Para un paseo aleatorio simétrico simple, considere el valor máximo de la caminata en los primeros 𝑛 pasos.

Sea 𝑔(𝑓) = max 𝑓(𝑡). Por el principio de invariancia,

0≤𝑡≤1

# lim

𝑔 (𝑆𝑛𝑡 ) = lim

max 𝑆𝑛𝑡 = lim

max

𝑆𝑘

# = 𝑔( 𝐵 ) = max 𝐵

𝑛 →∞

√𝑛

𝑛 →∞ 0≤𝑡≤1 √𝑛

𝑛 →∞ 0≤𝑘≤𝑛 √𝑛

𝑡 0≤𝑡≤1 𝑡

Obtenemos: max 𝑆𝑘 ≈ √𝑛 max 𝐵𝑡 para 𝑛 muy grande.

0≤𝑘≤𝑛 0≤𝑡≤1

Considere la función de densidad 𝑓𝑀

(𝑥) = √2 𝑒−𝑥2 ∕2, 𝑝𝑎𝑟𝑎 𝑥 > 0 para la variable aleatoria

𝜋

# 𝑀 = max

0≤𝑡≤1

𝐵𝑡.

Cuya media está dada por ( ) 2 y su desviación estándar 𝑆𝐷(𝑀) = 𝜋−2 ≈ 0.60

𝐸 𝑀

= √ ≈ 0.80

𝜋 𝜋

Con estos resultados, observamos que en los primeros 𝑛 pasos de la caminata aleatoria simétrica simple, el valor máximo es de aproximadamente (0.80)√𝑛 más o menos (0.60)√𝑛. En 𝑛 = 10,000 pasos la probabilidad de que se alcance un valor mayor a 200 es:

𝑃 ( max 𝑆

∞

𝑆𝑘 𝑆𝑘 2 2 ⁄

> 200) = 𝑃 ( max > 2) = 𝑃 ( max > 2) ≈ 𝑃(𝑀 > 2) = ∫ √ 𝑒 −𝑥 2 𝑑𝑥

0≤𝑘≤𝑛 𝑘

0≤𝑘≤𝑛 100

0≤𝑘≤𝑛 √𝑛 𝜋

2

= 0.0455